Підготовка до ректорського контролю з математики. Диференціальні рівняння

П.О.Наказной

Вступ

Запропоновані поради мають на меті скерувати перші кроки студента в процесі підготовки до ректорського контролю з математики (розділ "диференціальні рівняння"). Зрозуміло, навіть про стисле викладення відповідного курсу не йдеться. Мета цієї роботи нагадати основні поняття та методи деяких найбільш типових, на думку автора, тем. Їх повторення дозволить пригадати вже здобуті навички та скорегує в разі необхідності перелік питань до самостійного пошуку у наведеній литературі.

Передбачається що даний матеріал буде відпрацьований студентом до консультації з ректорського контролю. Зокрема, будуть розв'язані наведені приклади для самостійної роботи. У разі виникнення питань, вони усі будуть обговорені під час консультації.

1 Означення

Звичайним диференціальним рівнянням називається рівняння неявної функції, що містить окрім самої функції та аргументу також її похідні.

Порядок диференціального рівняння це порядок старшої похідної, що в ньому міститься.

Загальний розв'язок диференціального рівняння це множина усіх розв'язків, тобто функцій, що визначені на певному інтервалі, мають похідні необхідного порядку та обертають рівняння у тотожність.

Розв'язок диференціального рівняння, що не містить довільних сталих, називається частинним розв'язком.

Задачею Коші називається набір з диференціального рівняння порядку n та n початкових умов $y^{(i)} = y_0^{(i)}, i = \overline{0, n-1}$. Якщо загальний розв'язок відомий, підставляючи до нього

n початкових умов можна отримати систему з n алгебраїчних рівнянь для визначення n довільних сталих.

2 Приклади розв'язання

2.1 Рівняння з відокремлюваними змінними

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок та розв'язок задачі Коші $(x^2-1)y'+2xy^2=0,\ y(0)=1.$

Представимо $y'=\dfrac{dy}{dx}$, тоді

$$(x^2-1)dy=-2xy^2dx. \tag{1}$$

Домножимо рівняння на $\dfrac{1}{y^2(x^2-1)}$, щоб відокремити змінні. У отриманому виразі змінні відокремлені $\dfrac{dy}{y^2}=-\dfrac{2x}{x^2-1}dx$. Після його інтегрування отримаємо: $-\dfrac{1}{y}=-\ln|x^2-1|+C_1$. Для спрощення отриманого виразу перепозначимо довільну сталу $C_1=-\ln|C_2|$. Тоді $e^{\frac{1}{y}}=|C_2(x^2-1)|$. Оскільки $\pm C_2\equiv C$, остаточно маємо

$$(x^2-1)e^{-\frac{1}{y}}=C. \tag{2}$$

При діленні на $y^2(x^2-1)$ ми могли втратити розв'язки. Як видно з (1), співвідношення $y=0$ та $x^2-1=0$ задають особливі розв'язки рівняння, але друге з них можна отримати з (2), якщо покласти $C=0$. Тому остаточно отримаємо для загального розв'язку

$$(x^2-1)e^{-\frac{1}{y}}=C,\ y=0. \tag{3}$$

Для розв'язку задачі Коші покладемо у (3) $x=0, y=1$ звідки $C=-e^{-1}$.

Відповідь загальний: $(x^2-1)e^{-\frac{1}{y}}=C,\ y=0$; частинний $(1-x^2)e^{-\frac{1}{y}}=e^{-1}$.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок $y'=\sqrt{4x+2y-1}$.

Введемо заміну $\sqrt{4x+2y-1}=z$, тоді $y'=zz'-2=z$ або $zdt=(z+2)dx$. Поділимо обидві частини на $z+2$ та проінтегруємо: $z-2\ln|z+2|=x+C_1$. Для спрощення представимо довільну сталу $C_1=-2\ln|C_2|$ тоді $|z+2|e^{\frac{x-z}{2}}=|C_2|$, або, оскільки $\pm C_2=C$: $(z+2)e^{\frac{x-z}{2}}=C$.

Після повернення до $y:$ $(\sqrt{4x+2y-1}+2)e^{-\frac{1}{2}(3x+2y-1)}=C$. Особливий розв'язок $z+2$, який ми втрачаємо при діленні, можна включити у знайдений розв'язок якщо $C=0$.

Відповідь: $(\sqrt{4x+2y-1}+2)e^{-\frac{1}{2}(3x+2y-1)}=C$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок $xy'=y\cos\ln\frac{y}{x}$.

З ОДЗ $\ln\frac{y}{x}$ видно що $x,y\neq 0, \frac{y}{x}>0$. Після ділення рівняння на x отримаємо що y' є однорідною функцією $\frac{y}{x}:$ $y'=\frac{y}{x}\cos\ln\frac{y}{x}=f(\frac{y}{x})$. Таке рівняння можна розв'язати якщо ввести заміну $z=\frac{y}{x}, z>0$. Тоді $y'=z+xz'=z\cos\ln z$, або $xdz=z(\cos\ln z-1)dx$. Інтегруємо отримане співвідношення: $\ln|x|=-\int\frac{d\ln z}{\cos\ln z-1}=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\ln z+\ln|C_1|$, звідки $xe^{-\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\ln z}=C$, де $C\equiv\pm C_1$. Розв'язок алгебраїчного рівняння $\cos\ln z=1$ дає множину особливих розв'язків $y=xe^{2\pi n}, n\in Z$.

Відповідь: $xe^{-\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\ln z}=C, y=xe^{2\pi n}, n\in Z$.

2.2 Лінійні рівняння 1-ого порядку

Рівняння виду $y'(x)+p(x)y(x)=q(x)$ можна розв'язувати методом варіації сталої: спочатку розв'язати однорідне рівняння $y'(x)+p(x)y(x)=0$ та представити розв'язок у вигляді $y=Ce^{-\int p(x)dx}$ після чого шукати розв'язок початкового рівняння у вигляді $y=C(x)e^{-\int p(x)dx}$, де $C(x)$— невідома функція. Загальний розв'язок лінійного рівняння 1-ого порядку має вигляд $y=y_0+y_1$, де $y_0=Ce^{-\int p(x)dx}$ — загальний розв'язок однорідного рівняння, y_1 —частинний неоднорідного.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок $(2e^y-x)y'=1$.

Якщо поділити рівняння на y' та врахувати що $\frac{1}{y'}=x'(y)$, отримаємо лінійне відносно $x(y)$ рівняння: $x'=-x+2e^y$. Розв'яжемо спочатку однорідне рівняння $x'=-x$. Після розділення змінних маємо: $\frac{dx}{x}=-dy$. Після його інтегрування $\ln|x|=-y+C_1\equiv -y+ln|C_2|$, звідки $|x|=|C_2|e^{-y}$. Оскільки $\pm C_2\equiv C$, то $x=Ce^{-y}$. Тепер повертаємось до початкового неоднорідного рівняння і підставляємо у нього $x=C(x)e^{-y}$. Після компенсації доданків, які пропорційні C, що є ознакою вірного ходу розв'язку, отримаємо: $C'(y)=2e^{2y}$, звідки знаходимо $C(y)=e^{2y}+C$ та $x=Ce^{-y}+e^y$.

Відповідь: $x = Ce^{-y} + e^{y}$.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок $(x^2 + 3\ln y)ydx = xdy$.

Поділимо рівняння на ydx та введемо заміну $z = \ln y$. Відносно $z(x)$ маємо лінійне рівняння: $xz' = 3z + x^2$. Розв'яжемо однорідне рівняння $xz' = 3z$. Після відокремлення змінних отримаємо $\dfrac{dz}{z} = 3\dfrac{dx}{x}$, інтегрування якого призводить до $\ln|z| = 3\ln|x| + C_1 \equiv \ln|x|^3 + \ln|C_2|$. Експонування останнього виразу дає $|z| = |C_2||x|^3$, а якщо врахувати $C = \pm C_2$ то $z = Cx^3$. Вважаючи тепер $C = C(x)$ отримаємо для неоднорідного початкового рівняння: $C'(x) = \dfrac{1}{x^2}$, якщо $x \neq 0$. Таким чином $C(x) = -\dfrac{1}{x} + C, z = Cx^3 - x^2 = \ln y$. Як видно з умови $x = 0$ буде особливим розв'язком.

Відповідь: $\ln y = Cx^3 - x^2, x = 0$.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок $y' + 2y = y^2 e^x$ (рівняння типу Бернуллі).

Нехай $y \neq 0$. Тоді рівняння можна поділити на y^2 та ввести заміну $z = \dfrac{1}{y}$. Для $z(x)$ тоді отримуємо лінійне рівняння $-z' + 2z = e^x$, яке розв'язуємо варіацією сталої: $z = Ce^{2x} + e^x = \dfrac{1}{y}$. Як видно з рівняння $y = 0$ буде особливим розв'язком.

Відповідь: $\frac{1}{y} = Ce^{2x} + e^x, y = 0$.

2.3 Лінійні рівняння із сталими коефіцієнтами

Однорідні лінійні рівняння із сталими коефіцієнтами $L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$ розв'язуються методом Ейлера. Знаходяться корені характеристичного многочлену $L[\lambda] = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. Розв'язок однорідного рівняння у випадку якщо всі корені дійсні будується по формулі $y = \sum\limits_{i=1}^{l}\sum\limits_{m=0}^{k_i-1} C_{im}x^m e^{\lambda_i x}$, де l — кількість різних коренів, k_i — кратність λ_i як кореня характеристичного многочлену $L[\lambda]$. Комплексні корені, якщо всі коефіцієнти рівняння дійсні, ввійдуть до розв'язку разом із своїми спряженими. Набору комплексно спряжених коренів $\lambda_i = \alpha_i \pm i\beta_i$ відповідає розв'язок $y = \sum\limits_{i=1}^{l}\sum\limits_{m=0}^{k_i-1}(C_{im}\sin\beta_i x + C_{i\,m+k_i}\cos\beta_i x)x^m e^{\alpha_i x}$, де l — кількість різних пар λ, k_i — кратність i - ої пари.

Неоднорідні лінійні рівняння із сталими коефіцієнтами та спеціальною правою частиною (квазімногочленом) $L[y]=a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=P_n(x)e^{\lambda x}$, де $P_n(x)$ — многочлен порядку n, можна розв'язувати методом невизначених коефіцієнтів: $y=y_0+Q_n(x)x^se^{\lambda x}$, де y_0 — загальний розв'язок однорідного рівняння $L[y]=0, P_n(x)$ — невідомий многочлен порядку n, s — кратність λ як кореня характеристичного многочлену $L[\lambda]=0$, якщо λ є коренем і $s=0$, якщо ні. Якщо права частина $L[y]=(P_n(x)\sin\beta x+Q_n(x)\cos\beta x)e^{\alpha x}$, то частинний розв'язок $y_1=(\tilde{P}_n(x)\sin\beta x+\tilde{Q}_n(x)\cos\beta x)x^se^{\alpha x}$, де $\tilde{P}_n(x),\tilde{Q}_n(x)$ — невідомі многочлени, а для визначення s необхідно перевірити $\lambda=\alpha\pm i\beta$, як корень характеристичного многочлену. Якщо $L[y]=(P_n(x)\operatorname{sh}\beta x+Q_n(x)\operatorname{ch}\beta x)e^{\alpha x}$, то $y_1=(\tilde{P}_n(x)\operatorname{sh}\beta x+\tilde{Q}_n(x)\operatorname{ch}\beta x)x^se^{\alpha x}, \lambda=\alpha\pm\beta$. При цьому важливо що, якщо один з многочленів в правій частині $P_n(x)$ або $Q_n(x)$ дорівнює тотожньо нулю, необхідно дотримуватись наведених формул для пошуку частинного розв'язку. У випадку коли права частина складається з кількох різнотипних конструкцій, то частинний розв'язок за принципом суперпозиції є сумою розв'язків, отриманих окремо для кожної з них.

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок однорідного рівняння та вказати вигляд частинного $y''-2y'+2y=e^x+x\cos x$.

Складаємо характеристичний многочлен $\lambda^2-2\lambda+2=0$. Його корені $\lambda=1\pm i$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння $y_0=(C_1\sin x+C_2\cos x)e^x$ У правій частині присутні квазімногочлени з $\lambda_1=1$ та $\lambda_2=\pm i$. Оскільки всі значення λ не співпадають з коренями характеристичного рівняння, то частинні розв'язки $y_1=ae^x, y_2=(b+cx)\sin x+(d+fx)\cos x$. Загальний розв'язок всього неоднорідного рівняння $y=y_0+y_1+y_2$.

Відповідь: $y=(C_1\sin x+C_2\cos x)e^x+ae^x+(b+cx)\sin x+(d+fx)\cos x$.

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок однорідного рівняння та вказати вигляд частинного $y''-2y'+y=2xe^x+e^x\sin 2x$.

Характеристичний многочлен $\lambda^2-2\lambda+1=0$ має корень $\lambda=1$ із кратністю 2, тому $y_0=(C_1+C_2x)e^x$. Оскільки $\lambda_1=1$ співпадає з ним, то відповідний частинний розв'язок має вигляд $y_1=(a+bx)x^2e^x$, для $\lambda_2=1\pm 2i\neq\lambda$ отримаємо $y_2=(d\sin 2x+f\cos 2x)e^x$.

Відповідь: $y = (C_1 + C_2 x)e^x + (a + bx)x^2 e^x + (d \sin 2x + f \cos 2x)e^x$.

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок однорідного рівняння та вказати вигляд частинного $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x} \sin 2x$.

Характеристичний многочлен $\lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$ має корені $\lambda = 4 \pm 2i$, тому $y_0 = (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)e^{4x}$, $y_1 = ((a + bx) \sin 2x + (d + fx) \cos 2x)xe^{4x}$.

Відповідь: $y = (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)e^{4x} + ((a + bx) \sin 2x + (d + fx) \cos 2x)xe^{4x}$.

3 Приклади для самостійної роботи

3.1 Умови задач

Знайти загальні розв'язки:

1. $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$.
2. $y' = \cos(y - x)$.
3. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$.
4. $(1 - 2xy)y' = y(y - 1)$.
5. $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$.

Знайти загальні розв'язки однорідних рівнянь та вказати вигляд частинних:

6. $y'' + 6y' + 10y = xe^{-3x} + e^{3x} \cos x$.
7. $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x} \cos 5x$.
8. $y'' - 2y' + 5y = xe^x + e^x \sin 2x$.
9. $y'' + 2y' + y = xe^{-x} + x \cos x$.
10. $y''' + y' = \sin x + x \cos x$.
11. $y^{(4)} + y'' = x + 3 \cos x$.

3.2 Відповіді

1. $xe^{-\sqrt{y^2+1}} = C.$
2. $\operatorname{ctg} \frac{1}{2}(y - x) = x + C,\ y = x + 2\pi n,\ n \in Z.$
3. $x^2 = y^2 + Cy,\ y = 0.$
4. $x = \frac{y - \ln(Cy)}{(y-1)^2},\ y = 0,\ y = 1.$
5. $\dfrac{1}{y^3} = C\cos^3 x - 3\sin x \cos^2 x,\ y = 0.$
6. $y = (C_1 \sin x + C_2 \cos x)e^{-3x} + (ax + b)e^{-3x} + (d \sin x + f \cos x)e^{3x}.$
7. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-5x} + ((a + bx)\sin 5x + (d + fx)\cos 5x)e^{-2x}.$
8. $y = (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)e^x + (a + bx)e^x + (d \sin 2x + f \cos 2x)xe^x.$
9. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + (a + bx)x^2 e^{-x} + (d + fx)\sin x + (g + hx)\cos x.$
10. $y = C_1 + C_2 \sin x + C_3 \cos x + ((a + bx)\sin x + (d + fx)\cos x)x.$
11. $y = C_1 + C_2 x + C_3 \sin x + C_4 \cos x + (a + bx)x^2 + (d \sin x + f \cos x)x.$

Список літератури для подальшого повторення

[1] А.Ф.Филиппов, *Сборник задач по дифференциальным уравнениям*, М., 2003

[2] А.К.Боярчук, Г.П.Головач, *Дифференциальные уравнения в примерах и задачах (Антидемидович, т.5)*, М., 2001.

[3] А.М.Самойленко, С.А.Кривошея, Н.А.Перестюк, *Дифференциальные уравнения: примеры и задачи*, М., 1989.