

МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕРВАЛЬНОГО ОЦІНЮВАННЯ

А. С. Дроботун¹, С. А. Смирнов¹

¹Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

Анотація

В роботі представлений удосконалений метод аналізу ієрархій за допомогою інтервального оцінювання. Наведено приклад роботи нового методу для задачі, що представляє вибір студентом майбутньої роботи.

Ключові слова: метод аналізу ієрархій, метод парних порівнянь, метод лінійної згортки

Вступ

Метою даної роботи є удосконалення методу аналізу ієрархій (МАІ). Однією з головних проблем МАІ є перетворення якісної оцінки, що надає експерт, в кількісну шкалу, що потрібно для подальших обчислень. В методі аналізу ієрархій використовується така процедура як парні порівняння. Для кількісного представлення результатів суб'єктивних оцінок парних порівнянь Саати було запропоновано універсальну шкалу. В ній задані точні числа (семантично в скільки разів один суб'єкт кращий, чи гірший, ніж інший). Але, як правило, рішення приймають декілька експертів, і вони не завжди можуть знайти компроміс. До того ж множинні оцінки надійніші ніж точкові. Ось саме через це краще буде використати інтервал замість точної оцінки.

Метою даної роботи є вирішення проблеми перетворення якісної оцінки в кількісну шкалу шляхом заміни вагових коефіцієнтів, що рахуються на основі методу парних порівнянь, на їх інтервальні оцінки.

1. Теоретичні відомості

МАІ це систематична процедура для ієрархічного представлення елементів, що визначають суть будь-якої проблеми багатокритеріального прийняття рішень. Розв'язання проблеми є процесом поетапного розподілення пріоритету за допомогою вагових коефіцієнтів. На першому етапі виявляються найбільш важливі елементи проблеми, на другому - найкращий спосіб перевірки спостережень, випробування та оцінка елементів; наступним етапом може бути вироблення способу застосування рішення і оцінка його якості.[1]

В МАІ будь-яка задача або проблема попередньо структуруються і представляються у вигляді ієрархії або мережі. Таким чином в методі аналізу ієрархій основна мета дослідження та всі фактори, які в тій

чи іншій мірі впливають на досягнення мети, розподіляються на етапи..

- 1) Перший етап полягає в структуризації задачі у вигляді ієрархічної структури з кількома рівнями: цілі - критерії - альтернативи.
- 2) На другому етапі обличчя приймаюче рішення (ОПР) виконує попарні порівняння елементів кожного рівня. Результати порівнянь переводяться в числа.
- 3) Обчислюються коефіцієнти важливості для елементів кожного рівня. При цьому перевіряється узгодженість суджень ОПР.
- 4) Підраховується кількісний індикатор якості кожної з альтернатив і визначається найкраща альтернатива.[2]

Якщо брати вагові коефіцієнти з інтервальних оцінок, то і в підрахунку глобальних оцінок альтернатив також виникають інтервали. Щоб знайти точкові значення ваг використовуємо метод лінійної згортки. Рішення задачі вибору найкращої альтернативи включає два етапи. На першому вирішується завдання вибору значень вагових коефіцієнтів з інтервалу, зазначеного експертом і тим самим вибору одного з безлічі узагальнених критеріїв. На другому відбувається власне прийняття рішення, шляхом максимізації отриманого критерію. Процедура вибору одного з безлічі критеріїв передбачає врахування додаткових міркувань, що дозволяють зафіксувати значення ваг. [3]

2. Приклад використання модифікованого методу аналізу ієрархій

Розглянемо модифікований МАІ на прикладі вибору проекту аеропорту в Мехіко. Використовуємо 3 критерії:

- K_1 – вартість будівництва повинна бути мінімальною;
- K_2 – оцінка часу, який займає на дорогу до аеропорту повинен бути мінімальним;

- K_3 - кількість людей, яких потрібно відселити повинна бути мінімальною.

Припустимо що в нас є три альтернативи A_1, A_2, A_3

- 1) Побудуємо ієрархію, починаючи з вершини (ціль – це вибір проекту), через проміжні рівні (наші критерії) до самого нижнього рівня (альтернативи).

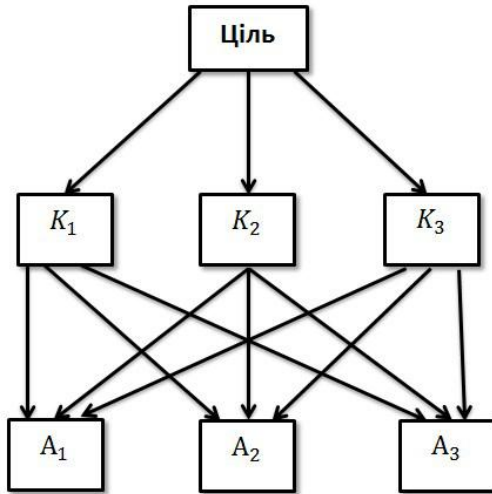


Рис. 1. Приклад ієрархії

- 2) Використаємо інтервальні оцінки
- 3) Побудуємо матриці парних порівнянь для наших рівнів.

Табл. 1. Матриця парних порівнянь другого рівня

	K_1	K_2	K_3
K_1	1	(1;2)	(2;3)
K_2	$(\frac{1}{2}; 1)$	1	(4;5)
K_3	$(\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{5}; \frac{1}{4})$	1

Табл. 2. Матриця парних порівнянь для третього рівня відносно першого критерія

K_3	A_1	A_2	A_3
A_1	1	4	8
A_2	$(\frac{1}{4})$	1	4
A_3	$(\frac{1}{8})$	$(\frac{1}{4})$	1

Табл. 3. Матриця парних порівнянь для третього рівня відносно другого критерія

K_2	A_1	A_2	A_3
A_1	1	7	5
A_2	$\frac{1}{7}$	1	4
A_3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	1

Табл. 4. Матриця парних порівнянь для третього рівня відносно третього критерія

K_3	A_1	A_2	A_3
A_1	1	2	$\frac{1}{2}$
A_2	2	1	1
A_3	2	1	1

Таким чином ми бачимо, що для другого рівня використано інтервальні оцінки пріоритетів. Перше значення інтервалу відповідає мінімальному значенню, друге – максимальному. Для підрахунку глобальних пріоритетів використовуємо такі формули:

$$x_i = \sqrt[3]{k_{i1} * k_{i2} * k_{i3}}$$

де x_i - значення ваги на другому рівні, k_{i1} - значення парних порівнянь на другому рівні відносно 1-го критерія

$$q = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i + \sum_{k=1}^3 x_k}{2}$$

де q – середнє значення ваги, x_l -нижня границя значення ваги, x_k -верхня границя значення ваги

$$v_i = \frac{x_i}{q}$$

де v_i – нормовані значення ваги i -го критерія, x_i – значення ваги на другому рівні

$$\beta_{ij} = \sqrt[3]{b_{ij1} * b_{ij2} * b_{ij3}}$$

де β_{ij} - ваги на 3-му рівні відносно j -го критерія, b_{ij1} - значення парних порівнянь на третьому відносно j -го критерія

$$\alpha_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{\sum_{l=1}^3 \beta_{lj}}$$

де α_{ij} - нормовані значення ваги на 3-му рівні відносно j -го критерія

$$S_i = \sum_{j=1}^3 v_j * \alpha_{ij}$$

де S_i -значення глобального пріоритету

4) Спочатку знайдемо ваги на другому рівні :

$$x_1 = \sqrt[3]{1 * (1; 2) * (2; 3)} = (1.26; 2.45)$$

$$x_2 = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}; 1\right) * 1 * (4; 5)} = (1.26; 1.71)$$

$$x_3 = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right) * \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{4}\right) * 1} = (0.4; 0.5)$$

$$q = \frac{1.26 + 1.26 + 0.4 + (2.45 + 1.71 + 0.5)}{2} = 3.79$$

$$v_1 = \frac{x_1}{q} = (0.33; 0.65)$$

$$v_2 = \frac{x_2}{q} = (0.33; 0.45)$$

$$v_3 = \frac{x_3}{q} = (0.106; 0.13)$$

5) Ваги на 3-му рівні:

- Відносно першого критерія:

$$\beta_{11} = \sqrt[3]{1 * 4 * 8} = 3.17$$

$$\beta_{21} = \sqrt[3]{\frac{1}{4} * 1 * 4} = 1$$

$$\beta_{31} = \sqrt[3]{\frac{1}{8} * \frac{1}{4} * 1} = 0.31$$

$$\sum_{i=1}^3 \beta_{i1} = 3.17 + 1 + 0.31 = 4.48$$

$$\alpha_{11} = \frac{\beta_{11}}{\sum_{i=1}^3 \beta_{1i}} = 0.7$$

$$\alpha_{21} = \frac{\beta_{21}}{\sum_{i=1}^3 \beta_{1i}} = 0.22$$

$$\alpha_{31} = \frac{\beta_{31}}{\sum_{i=1}^3 \beta_{1i}} = 0.069$$

- Відносно другого критерія:

$$\beta_{12} = \sqrt[3]{1 * 7 * 5} = 3.27$$

$$\beta_{22} = \sqrt[3]{\frac{1}{7} * 1 * 4} = 0.87$$

$$\beta_{32} = \sqrt[3]{\frac{1}{5} * \frac{1}{4} * 1} = 0.37$$

$$\sum_{i=1}^3 \beta_{i2} = 3.27 + 0.83 + 0.37 = 4.47$$

$$\alpha_{12} = \frac{\beta_{12}}{\sum_{i=1}^3 \beta_{2i}} = 0.73$$

$$\alpha_{22} = \frac{\beta_{22}}{\sum_{i=1}^3 \beta_{2i}} = 0.19$$

$$\alpha_{32} = \frac{\beta_{32}}{\sum_{i=1}^3 \beta_{2i}} = 0.08$$

- Відносно третього критерія :

$$\beta_{13} = \sqrt[3]{1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2}} = 0.63$$

$$\beta_{23} = \sqrt[3]{2 * 1 * 1} = 1.26$$

$$\beta_{33} = \sqrt[3]{2 * 1 * 1} = 1.26$$

$$\sum_{i=1}^3 \beta_{i3} = 0.63 + 1.26 + 1.26 = 3.15$$

$$\alpha_{13} = \frac{\beta_{12}}{\sum_{i=1}^3 \beta_{3i}} = 0.2$$

$$\alpha_{23} = \frac{\beta_{22}}{\sum_{i=1}^3 \beta_{3i}} = 0.4$$

$$\alpha_{33} = \frac{\beta_{32}}{\sum_{i=1}^3 \beta_{3i}} = 0.4$$

6) Розрахуємо інтервали глобальних пріоритетів:

$$\begin{aligned} S_1 &= v_1 * \alpha_{11} + v_2 * \alpha_{12} + v_3 * \alpha_{13} = \\ &= (0.33; 0.65) * 0.7 + (0.33; 0.45) * 0.73 + \\ &+ (0.106; 0.13) * 0.2 = (0.4931; 0.81). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= v_1 * \alpha_{21} + v_2 * \alpha_{22} + v_3 * \alpha_{23} = \\ &= (0.33; 0.65) * 0.22 + (0.33; 0.45) * 0.19 + \\ &+ (0.106; 0.13) * 0.4 = (0.179; 0.2545) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= v_1 * \alpha_{31} + v_2 * \alpha_{32} + v_3 * \alpha_{33} = \\ &= (0.33; 0.65) * 0.069 + (0.33; 0.45) * 0.08 + \\ &+ (0.106; 0.13) * 0.4 = (0.09; 0.15) \end{aligned}$$

7) Тепер за допомогою мінімаксного методу знайдемо глобальні пріоритети у вигляді чисел, а не інтервалів:

$$\overline{S}_1 \leq S_1 \leq \underline{S}_1$$

$$\overline{S}_2 \leq S_2 \leq \underline{S}_2$$

$$\overline{S}_3 \leq S_3 \leq \underline{S}_3$$

Для нашого прикладу:

$$0.4931 \leq S_1 \leq 0.81$$

$$0.179 \leq S_2 \leq 0.2545$$

$$0.09 \leq S_3 \leq 0.15$$

Нехай потрібний нам елемент знаходиться на другій позиції:

$$\underline{S}_1, \widetilde{S}_2, \overline{S}_3 \rightarrow \widetilde{S}_2 = 1 - (\overline{S}_1 + \underline{S}_3)$$

$$\widetilde{S}_2 = 0.101 \notin [0.179; 0.2545]$$

$(\overline{S}_1 + \underline{S}_3) = 0.899$ – велике \rightarrow робимо здвиг вправо

$$\widetilde{S}_1, \overline{S}_2, \overline{S}_3 \rightarrow \widetilde{S}_1 = 1 - (\overline{S}_2 + \overline{S}_3) = 0.731$$

$$\widetilde{S}_1 = 0.731 \in [0.4931; 0.81]$$

Отже, глобальні пріоритети матимуть вигляд:

$$S_1 = 0.731$$

$$S_2 = 0.179$$

$$S_3 = 0.09$$

8) Для визначення переможця за даним методом порівняємо глобальні пріоритети S_j . Та альтернатива у якій буде найбільший пріоритет – переможець. Згідно з проведеними розрахунками найбільший пріоритет отримала альтернатива A_1 , вона і перемагає.

Висновки

У даній роботі проаналізовано МАІ, вказано його недоліки та запропоновано модифікацію, яка позбавляє даний метод аномальної чутливості до засобів перетворення якісної експертної оцінки в кількісну шкалу.

Також представлено роботу модифікованого методу на прикладі вибору проекту побудови аеропорту. З вище представлених даних видно, що запропонована модифікація надійно вирішує поставлену задачу.

Література

1. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем — М.: Радио и связь, 1991. — 224 с.
2. Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных Странах — Учебник.-М.:Логос,2000. — 296 с.
3. Смирнов С. А., Гончаренко И. С. Гарантированный синтез скалярного критерия для решения задачи многокритериальной оптимизации. — // Систем. дослідж. та інформ. технології, 2006, № 2 — 99-106 с.